Объект $\mathcal{U}=\{u^{\Lambda}_{\sigma}\}$ является геометрическим объектом, определяющим H-виртуальную нормаль Лаптева-Остиану распределения Λ. Этот объект внутренне присоединен к распределению Λ. Он охвачен фундаментальным объектом третьего порядка распределения Λ. Нормаль $\mathcal{U}$ ассоциирована нормально оснащающему полю нормалей ℓ, ибо при построении охвата объекта $\mathcal{U}$ использован структурный объект ℓ. Сравнивая строение компонент объектов $\mathcal{U}=\{u^{\Lambda}_{\sigma}\}$ и $\bar{t}=\{\bar{t}^{\Lambda}_{\sigma}\}$ H-виртуальных нормалей для распределения Λ, устанавливаем, что в каждой точке $x\in M_n$ элементы H-виртуальных нормалей $\mathcal{U}$ и $\bar{t}$ совпадают. Справедлива

Т е о р е м а. В каждой точке $x\in M_n$ пересечение нормали Лаптева-Остиану распределения Λ с соответствующими элементами распределения H является H-виртуальной нормалью Лаптева-Остиану этого распределения Λ.

Библиографический список

I. А к м а т о в Б. Об инвариантном построении геометрии распределений m-мерных линейных элементов в дифференцируемом многообразии M_n / МГПИ. М., 1983. 34 с. Деп в ВИНИТИ 26.05.83, № 2874-83.

2. О с т и а н у Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures. et appl. (R.P.R.) 1962. V.7. № 22. С. 231-240.

3. О с т и а н у Н.М. Распределение m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. II // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С. 95-114.

УДК 514.76

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МЕТРИК НА ГЛАДКОМ МНОГООБРАЗИИ, СВЯЗАННЫХ С ДИНАМИЧЕСКИМИ ПОЛИСИСТЕМАМИ

С.И.А л е ш н и к о в

(Калининградский государственный университет)

Пусть V -связное компактное многообразие класса C^{∞} размерности N, на котором определены полные попарно коммутирующие векторные поля X_i $(1\leq i\leq N)$ класса C^{∞}, такие, что для любой точки $a\in V$ векторы $X_1(a),\ldots,X_N(a)$ линейно независимы в ка-

сательном пространстве $T_a(V)$, g - риманова метрика, δ - расстояние на V, описанные в [1]. С точки зрения некоторых приложений представляет интерес "локально-глобальная" структура расстояния δ. Используем обозначения [1].

П р е д л о ж е н и е I. Пусть (x_n) и (y_n) - последовательности точек из V, $x_n\to x, y_n\to y$ при $n\to\infty$. Тогда существуют подпоследовательности $(x_\ell)\subset(x_n)$ и $(y_\ell)\subset(y_n)$ и последовательность $c_\ell\in\mathfrak{I}(x_\ell,y_\ell)$, такие, что $J(c_\ell)=\delta(x_\ell,y_\ell)$ и c_ℓ сходится равномерно относительно метрики δ к некоторой функции $\mathfrak{I}(x,y)$ такой, что $J(c)=\delta(x,y)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть

$$f_n: T^{(n)}\to V,\quad f_n^{(1)}: T_1^{(n)}\to V,\quad f_n^{(2)}: T_2^{(n)}\to V$$

такие функции из $\mathfrak{I}(x_n,y_n)$, $\mathfrak{I}(x,x_n)$, $\mathfrak{I}(y,y_n)$ соответственно, что $J(f_n)=\delta(x_n,y_n)$, $J(f_n^{(1)})=\delta(x,x_n)$, $J(f_n^{(2)})=\delta(y,y_n)$, $L^{(n)}, L_1^{(n)}, L_2^{(n)}$ - длины интервалов $T^{(n)}, T_1^{(n)}, T_2^{(n)}$ соответственно. Положим:

$$\bar{f}_n(t)=\begin{cases} f_n^{(1)}(t), & 0\leq t< L_1^{(n)};\\ f_n(t-L_1^{(n)}), & L_1^{(n)}\leq t< L_1^{(n)}+L^{(n)};\\ f_n^{(2)}(t-L_1^{(n)}-L^{(n)}), & L_1^{(n)}+L^{(n)}\leq t\leq L_1^{(n)}+L^{(n)}+L_2^{(n)}.\end{cases}$$

Легко видеть, что $\bar{f}_n\in\mathfrak{I}(x,y)$ при любом n и $\lim\limits_{n\to\infty}J(\bar{f}_n)=\delta(x,y)$. Согласно [1] можно исправить последовательность $(\bar{f}_n)$ так, чтобы получить новую последовательность (h_n), у которой $J(h_n)\leq J(f_n)$, множество $\nu(h_n)$ ограничено,

$h_n\in\mathfrak{I}(x,y)$, $\lim\limits_{n\to\infty}J(h_n)=\delta(x,y)$, $h_n(t_n')=x_n$, $h_n(t_n'')=y_n$

для некоторых t_n' и t_n'', $J(h_n|[t_n',t_n''])=\delta(x_n,y_n)$. Из последовательности (h_n) можно выбрать подпоследовательность $(h_\ell)\subset(h_n)$, которая равномерно относительно δ сходится к функции $c\in\mathfrak{I}(x,y)$ такой, что $J(c)=\delta(x,y)$ и $\nu(c)=\nu(h_\ell)=\nu_0$ при всех ℓ.

2) Обозначим теперь $c_\ell=h_\ell|[t_\ell',t_\ell'']$. Легко видеть, что

$$c_\ell\in\mathfrak{I}(x_\ell,y_\ell),\qquad \lim_{\ell\to\infty}J(c_\ell)=\delta(x,y).$$

Делая линейную замену переменных, можно считать, что $t_\ell'=0$ при всех ℓ. Тогда, исходя из равномерной сходимости h_ℓ к c и равномерной непрерывности c, легко видеть, что c_ℓ равномерно сходится к c на любом промежутке $[0,\beta]$, где $0<\beta<t_{\nu_0}$, $c(t_{\nu_0})=y$. Продолжим c_ℓ для $t\geq t_\ell''$, положив $c_\ell(t)=y_\ell$, и продолжим c для $t\geq t_{\nu_0}$, положив $c(t)=y$. Легко убедиться при этом, что c_ℓ сходится равномерно к c

на $[0;\infty[$.

З а м е ч а н и е. Если $c\in\mathfrak{T}(x,y)$, T – область определения c, $\mathcal{J}(c)=\delta(x,y)$, $[a,b]\subset T$, то $\mathcal{J}(c|[a,b])=\delta(c(a),c(b))$. Если $y_1\in V$, $c_1\in\mathfrak{T}(x,y_1)$, $\mathcal{J}(c_1)=\delta(x,y_1)$, T_1 – область определения c_1 с тем же левым концом, что и T, и $c(t)=c_1(t_1)$ для некоторых $t\in T$, $t_1\in T_1$, то $t=t_1$. При этом можно считать, что $c_1(\tau)=c(\tau)$ при $\tau\le t$.

П р е д л о ж е н и е 2. Пусть W – интегральное многообразие одного из полей X_i и $W\subset V$, $x_0\in V$, $y_0\in W$. Тогда точка y_0 обладает такой окрестностью $\Omega_{y_0}(x_0)$ в W, что для всякого $y\in\Omega_{y_0}(x_0)$ выполняется равенство

$$|\delta(x_0,y)-\delta(x_0,y_0)|=\delta(y,y_0). \qquad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Обозначим γ – параметрическое представление многообразия W в окрестности точки y_0, такое, что $y_0=\gamma(0)$. Пусть последовательность (t_k) такова, что $t_k>0$, $t_k\to 0$ при $k\to\infty$, $t_{k+1}<t_k$ для всех $k\in\mathbb{N}$. Будем обозначать $y_k=\gamma(t_k)$. В силу предложения 1 можно выбрать подпоследовательность $(t_n)\subset(t_k)$ и построить последовательность $c_n\in\mathfrak{T}(x_0,y_n)$, такие, что $\mathcal{J}(c_n)=\delta(x_0,y_n)$ и c_n равномерно сходится к некоторой кривой $c\in\mathfrak{T}(x_0,y_0)$, такой, что $\mathcal{J}(c)=\delta(x_0,y_0)$. Обозначим

$$T^{(n)}=[0,b^{(n)}]=\bigcup_{j=1}^{\nu(c_n)}[\tau_{j-1}^{(n)},\tau_j^{(n)}],\quad T=[0,b]=\bigcup_{j=1}^{\nu(c)}[\tau_{j-1},\tau_j]$$

области определения функций c_n и c соответственно.

2) Найдется конечное число открытых множеств U_p, областей определения карт (U_p,Φ_p) атласа $\mathcal{A}$ многообразия V, покрывающих $c(T)$. Как и в [1] можно построить конечные последовательности (s_ℓ) точек из T и $(\varkappa(\ell))$ целых чисел, $1\le\ell\le L$, удовлетворяющие условиям:

$$s_1=0,\ c(s_1)\in U_{\varkappa(1)},\ c(s_{\ell+1})\in U_{\varkappa(\ell+1)}\cap\overline{U}_{\varkappa(\ell)},\ c(s_{\ell+1})\notin\bigcup_{q=1}^{\ell}U_{\varkappa(q)},$$

$$c([s_\ell,s_{\ell+1}[)\subset U_{\varkappa(\ell)},\quad c(T)\subset U=\bigcup_{\ell=1}^{L}U_{\varkappa(\ell)}$$

для любого ℓ: $1\le\ell\le L-1$.

3) Индукцией по L докажем, что при всех достаточно больших n выполняется

$$|\delta(x_0,y_n)-\delta(x_0,y_0)|=\delta(y_n,y_0). \qquad (2)$$

При $L=1$ равенство (2) очевидно следует из определений $\mathcal{J}$ и δ. Допустим, что оно доказано для $L-1$. Если найдется $s'\in T\cap T^{(n)}$, такое, что $s'\ge s_2$ и $c_n(s')=c(s')$ для всех достаточно больших n, то в силу замечания и предположения индукции для точки $c(s')$ свойство (2) выполняется. Далее предполагаем $s'<s_2$. Нетрудно видеть, что существует j и точки $u_0\in(\tau_{j-1},\tau_j)$, $u_n\in(\tau_{j-1}^{(n)},\tau_j^{(n)})$, такие, что

$$c([u_0,b])\subset\bigcup_{\ell=2}^{L}U_{\varkappa(\ell)},\quad c(u_0)\in U_{\varkappa(1)},$$

$$c_n([u_n,b^{(n)}])\subset\bigcup_{\ell=2}^{L}U_{\varkappa(\ell)},\quad c_n(u_n)\in U_{\varkappa(1)}.$$

Можно найти также точку $x_1\in U_{\varkappa(1)}\cap U_{\varkappa(2)}$, такую, что

$$\delta(x_0,c_n(u_n))=\delta(x_0,x_1)+\delta(x_1,c_n(u_n)),$$

$$\delta(x_0,c(u_0))=\delta(x_0,x_1)+\delta(x_1,c(u_0))$$

и изменить кривые $c|[0,u_0]$ и $c_n|[0,u_n]$, не меняя их длин, так, чтобы они проходили через точку x_1. Для x_1 (вместо x_0) по предположению индукции (2) выполняется. Ясно, что оно выполняется и для x_0.

4) Пусть N_0 – целое, начиная с которого выполняется (2). Нетрудно видеть, что все c_n, $n\ge N_0$ могут быть изменены (с сохранением длины) так, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

$$c_n(t)=c(t),\ t\le b;\quad c_n(t)=c_{N_0}(t),\ t\le b^{(N_0)};\quad c(t)=c_{N_0}(t),\ t\le b^{(N_0)}. \qquad (3)$$

5) Если сначала взять последовательность (t_k), у которой $t_k<0$, $t_k\to 0$ при $k\to\infty$, $t_{k+1}>t_k$ для всех k, то аналогично приходим к целому N_1, для которого выполняются (2) и (3). Положим $\Omega_{y_0}(x_0)=\gamma([t_{N_1},t_{N_0}])$. Легко убедиться, что $\Omega_{y_0}(x_0)$ – искомая окрестность, для которой выполняется (1).

Библиографический список

1. А л е ш н и к о в С.И. О метриках на гладком многообразии, связанных с динамическими полисистемами специального вида // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1990. Вып.21. С.5-7.